TRƯỜNG ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

KHAMLIEN PHONXAYYAVONG

VỀ NỬA NHÓM SỐ HẦU ĐỐI XỨNG SINH BỞI BỐN PHẦN TỬ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

KHAMLIEN PHONXAYYAVONG

VỀ NỬA NHÓM SỐ HẦU ĐỐI XỨNG SINH BỞI BỐN PHẦN TỬ

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 84.60.104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN ĐỖ MINH CHÂU

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với các luận văn trước đây. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là các nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Khamlien PHONXAYYAVONG

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành trong khóa 26 đào tạo thạc sỹ của trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Trần Đỗ Minh Châu, giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian và công sức để chỉ bảo hướng dẫn tôi từ những điều nhỏ nhặt nhất tới những vấn đề khó khăn Cô vẫn luôn kiên nhẫn, tận tình quan tâm giúp đỡ tôi để hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân và gia đình đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái nguyên, ngày 18 tháng 9 năm 2020

Người viết Luận văn

Khamlien PHONXAYYAVONG

Mục lục

MỞ ĐẦU

Một nửa nhóm số H là một vị nhóm con của $\mathbb{N}$ với phép toán cộng sao cho phần bù của H trong $\mathbb{N}$ là hữu hạn. Cho H là nửa nhóm số có hệ sinh tối tiểu là $\{n_1, \ldots, n_e\}$ và $K[H] = K[t^{n_1}, \ldots, t^{n_e}]$ là vành nửa nhóm số tương ứng với H, trong đó t là biến, K là một trường. Ta có thể viết $K[H]$ dưới dạng thương $K[H] = \dfrac{S}{I_H}$ của vành đa thức $S = K[x_1, \ldots, x_e]$ trên iđêan I_H với I_H là hạt nhân của K-đại số đồng cấu từ S vào $K[H]$, xác định bởi $x_i \mapsto t^{n_i}$. Iđêan I_H là iđêan sinh bởi các nhị thức và được gọi là *iđêan định nghĩa* của $K[H]$.

Trong các nửa nhóm số, lớp nửa nhóm số hầu đối xứng có nhiều tính chất rất thú vị. Chúng là một mở rộng tự nhiên của lớp nửa nhóm số đối xứng và hoàn toàn phân biệt với lớp nửa nhóm số đối xứng (theo Nari [8]). Chú ý rằng, năm 1970, Kunz [6] đã chứng minh rằng H là đối xứng nếu và chỉ nếu $K[H]$ là vành Gorenstein. Sau đó, Barucci và Fröberg [1] đã giới thiệu khái niệm vành hầu Gorenstein (là một mở rộng của vành Gorenstein) và khi áp dụng vào vành nửa nhóm số đã dẫn đến khái niệm nửa nhóm số hầu đối xứng. Lý thuyết về vành hầu Gorenstein tiếp tục được nghiên cứu sâu bởi S. Goto, Takahashi và Taniguchi [2] và đã đạt được nhiều kết quả quan trọng.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu về nửa nhóm số hầu đối xứng sinh bởi 4 phần tử. Trong luận văn này, chúng tôi trình bày chi tiết một số kết quả trong bài báo: J. Herzog, K. Watanabe (2019), *Almost symmetric numerical semigroups,* Semigroup Forum **98**, 589–630. Nội dung của luận văn gồm hai chương.

Chương 1 trình bày một số khái niệm cơ bản về nửa nhóm số bao gồm khái niệm nửa nhóm số, tập Apery, chiều nhúng, số Frobenius, số giả Frobenius, các nửa nhóm số đối xứng, số giả đối xứng, hầu đối xứng.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn, trình bày một số kết quả về nửa nhóm số hầu đối xứng sinh bởi 4 phần tử. Cho $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ là nửa nhóm số hầu đối xứng sinh bởi 4 phần tử. Kí hiệu $PF(H)$ là tập các số giả Frobenius của H. Tiết 2.1 tìm hiểu về biểu diễn của các phần tử $f + n_k$, với $f \in PF(H)$. (Bổ đề 2.1.8, Bổ đề 2.1.10) Nội dung của tiết này là một chuẩn bị quan trọng cho các tiết sau. Tiết 2.2 trình bày cấu trúc của ma trận $RF(f)$, với $f \in PF(H)$. (Hệ quả 2.2.10, Mệnh đề 2.2.13, Mệnh đề 2.2.15). Tiết 2.3 trình bày cấu trúc của ma trận $RF(F(H)/2)$ khi H là nửa nhóm số giả đối xứng sinh bởi 4 phần tử. Chú ý rằng mỗi nửa nhóm số giả đối xứng đều là hầu đối xứng (Định lí 2.3.3, Định lí 2.3.4). Tiết 2.4 trình bày lại chứng chi tiết kết quả: kiểu của nửa nhóm số hầu đối xứng sinh bởi 4 phần tử không vượt quá 3.

Chương 1

Một số khái niệm về nửa nhóm số

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị cho việc theo dõi chương sau như khái niệm của nửa nhóm số, tập Apery, chiều nhúng, số Frobenius, số giả Frobenius, nửa nhóm số đối xứng, giả đối xứng và hầu đối xứng.

1.1 Nửa nhóm số

Mỗi nửa nhóm số đều là một vị nhóm. Vì thế để nghiên cứu các nửa nhóm số trước hết ta nhắc lại các khái niệm và tính chất cơ bản của vị nhóm.

Định nghĩa 1.1.1. Một *nửa nhóm* là một cặp $(H, +)$ với H là một tập hợp và $+$ là một phép toán hai ngôi trên H thỏa mãn tính chất kết hợp.

Từ đây trở đi, mỗi nửa nhóm H được nhắc đến đều có tính chất giao hoán, nghĩa là $a + b = b + a$ với mọi $a, b \in H$. Để cho tiện ta viết H thay cho $(H, +)$.

Định nghĩa 1.1.2. Một *nửa nhóm con* T của nửa nhóm H là một tập con của H, đóng kín với phép toán hai ngôi trên H.

Rõ ràng, giao của các nửa nhóm con của nửa nhóm H là một nửa nhóm con của H. Vì thế khi cho A là một tập con của H, nửa nhóm con nhỏ nhất của H chứa A là giao của tất cả các nửa nhóm con của H chứa A, kí hiệu là $\langle A \rangle$, và được gọi là *nửa nhóm con sinh bởi* A. Ta dễ dàng kiểm tra được

$$\langle A \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ và } a_1, \ldots, a_n \in A \right\},$$

trong đó $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên không âm. Ta nói rằng H sinh bởi $A \subseteq H$ nếu $H = \langle A \rangle$. Trong trường hợp này A là *hệ sinh* của H. Nếu A có hữu hạn phần tử thì ta nói H là *hữu hạn sinh*.

Định nghĩa 1.1.3. Một nửa nhóm M được gọi là *vị nhóm* nếu nó có phần tử đơn vị, nghĩa là tồn tại một phần tử trong M, được kí hiệu là 0, sao cho $0 + a = a + 0 = a$, với mọi $a \in M$.

Một tập con N của M được gọi là một *vị nhóm con* của M nếu nó là nửa nhóm con của M và $0 \in N$. Từ đây suy ra $\{0\}$ là một vị nhóm con của M và được gọi là vị nhóm con tầm thường của M.

Hoàn toàn giống như nửa nhóm, giao của tất cả các vị nhóm con của một vị nhóm cũng là vị nhóm con của vị nhóm đó. Nếu M là một vị nhóm và A là tập con của M thì vị nhóm con nhỏ nhất của M chứa A là tập

$$\langle A\rangle = \left\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N} \text{ và } a_1, \ldots, a_n \in A\right\},$$

và được gọi là vị nhóm con của M sinh bởi A. Cũng giống như phần nửa nhóm, tập A là *hệ sinh* của M nếu $\langle A\rangle = M$, và ta cũng nói M được sinh bởi A. Vì thế, một vị nhóm M là *hữu hạn sinh* nếu M có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử. Chú ý rằng, $\langle\emptyset\rangle = \{0\} = \langle 0\rangle$.

Dễ dàng kiểm tra được tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ cùng với phép toán cộng là một vị nhóm. Tiết này dành để nghiên cứu các vị nhóm con của $\mathbb{N}$. Ta sẽ chứng minh được rằng các vị nhóm con của $\mathbb{N}$ có thể phân lớp sai khác một đẳng cấu bởi những vị nhóm con có phần bù hữu hạn trong $\mathbb{N}$.

Định nghĩa 1.1.4. Một vị nhóm con của $\mathbb{N}$ có phần bù trong $\mathbb{N}$ hữu hạn được gọi là một *nửa nhóm số*.

Nhận xét 1.1.5. Từ Định nghĩa 1.1.4, ta thấy một tập con $H \subset \mathbb{N}$ là nửa nhóm số nếu và chỉ nếu H thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $0 \in H$;

(2) $a + b \in H$ với mọi $a, b \in H$;

(3) $\sharp\ \mathbb{N} \setminus H < \infty$.

Với mỗi tập con khác rỗng A của $\mathbb{N}$, vị nhóm con $\langle A\rangle$ của $\mathbb{N}$ sinh bởi A là một nửa nhóm số khi và chỉ khi ước chung lớn nhất của các phần tử của A là một.

Bổ đề 1.1.6. *Cho A là tập con khác rỗng của N. Khi đó $\langle A\rangle$ là nửa nhóm số khi và chỉ khi* $\gcd(A) = 1$.

Chứng minh. Giả sử $\langle A \rangle$ là nửa nhóm số và $d = \gcd(A)$. Rõ ràng, nếu h thuộc $\langle A \rangle$ thì $d \mid h$. Vì $\langle A \rangle$ là nửa nhóm số nên $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ là hữu hạn. Suy ra $N \setminus \langle A \rangle$ có phần tử lớn nhất là x. Vì thế $x+1$ và $x+2$ đều thuộc $\langle A \rangle$. Suy ra $d \mid x+1, d \mid x+2$. Do đó, $d = 1$.

Để chứng minh chiều ngược lại, ta chỉ cần chứng minh $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ là tập hữu hạn. Vì $\gcd(A) = 1$ nên tồn tại các số nguyên $z_1, \ldots, z_n$ và $a_1, \ldots, a_n$ sao cho

$$z_1a_1 + z_2a_2 + \ldots + z_na_n = 1.$$

Bằng cách đánh số lại và chuyển các số hạng chứa z_i âm sang vế phải, ta tìm được các $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ trong tập $\{1, \ldots, n\}$ sao cho

$$z_{i_1}a_{i_1} + \ldots + z_{i_k}a_{i_k} = 1 - z_{j_1}a_{i_1} - \ldots - z_{j_l}a_{j_l}.$$

Đặt $h = -z_{j_1}a_{i_1} - \ldots - z_{j_l}a_{j_l}$. Khi đó $h \in \langle A \rangle$ và $h+1 \in \langle A \rangle$. Ta chứng minh nếu $n \geq (h-1)h + (h-1)$, thì $n \in \langle A \rangle$. Thật vậy, chia n cho h ta tìm được các số nguyên q và r sao cho $n = qh + r$ với $0 \leq r \leq h-1$. Vì $n = qh + r \geq (h-1)h + (h-1)$ nên $q \geq h-1 \geq r$. Do đó

$$n = (rh + r) + (q-r)h = r(h+1) + (q-r)h \in \langle A \rangle.$$

Vậy tập $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ là hữu hạn và do đó $\langle A \rangle$ là nửa nhóm số. □

Mệnh đề 1.1.7. *Cho M là vị nhóm con không tầm thường của $\mathbb{N}$. Khi đó M đẳng cấu với một nửa nhóm số nào đó.*

Chứng minh. Đặt $d = \gcd(M)$ và $H = \langle \{\frac{m}{d} \mid m \in M\} \rangle$. Suy ra $\gcd\{\frac{m}{d} \mid m \in M\} = 1$. Vì thế, H là nửa nhóm số theo Bổ đề 1.1.6. Xét ánh xạ $f : M \to H$ cho bởi $f(m) = \frac{m}{d}$. Rõ ràng f là một đẳng cấu vị nhóm. □

Giả sử A và B là các tập con của tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Kí hiệu

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Với H là nửa nhóm số, ta viết $H^* = H \setminus \{0\}$. Khi đó $H^* + H^*$ chính là tập các phần tử của H viết được dưới dạng tổng hai phần tử khác 0 trong H. Với kí hiệu này, ta có Bổ đề sau.

Bổ đề 1.1.8. *Cho H là một vị nhóm con của $\mathbb{N}$. Khi đó $H^* \setminus H^* + H^*$ là một hệ sinh của H. Hơn nữa, mỗi hệ sinh của H đều chứa $H^* \setminus H^* + H^*$.*